BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2011

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **coefficient : 2**

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **6 pages numérotées de la page 1/6 à 6/6.**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

Exercice n°1 (3 points)

Alain et Catherine organisent une soirée pour des membres de leur club informatique.

Ils décident que pour être invité il faut :

- être ami d'Alain et de Catherine ;
- ou ne pas être ami d'Alain, mais être ami de Catherine ;
- ou ne pas être ami de Catherine, mais jouer au bridge.

Pour un membre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :

$a=1$ s'il est un ami d'Alain, $b=1$ s'il joue au bridge, $c=1$ s'il est un ami de Catherine.

1. Écrire la fonction booléenne $f(a,b,c)$, qui traduit le fait qu'un membre du club soit invité.

2. Donner le tableau de Karnaugh de cette fonction.

3. **a)** Xavier est un ami d'Alain, mais pas de Catherine.
Est-il nécessairement invité ? Justifier.

b) Vincent n'est pas un ami d'Alain, mais joue au bridge.
Est-il nécessairement invité ? Justifier.

4. Simplifier au maximum la fonction booléenne $f(a,b,c)$, à l'aide du tableau de Karnaugh.

5. Écrire la règle de décision d'inviter un membre du club informatique de la façon la plus simple possible.

Exercice n°2 (7 points)

Partie A : probabilités élémentaires et conditionnelles

Afin d'optimiser la fiabilité des cartes de fidélité d'une grande enseigne de distribution, une procédure de vérification a été mise en place. Cependant, il peut se produire deux types d'erreurs de contrôle :

- des cartes de fidélité sans défaut peuvent être rejetées ;
- des cartes de fidélité avec défaut peuvent être acceptées.

Sur les 100 000 dernières cartes fabriquées, on a observé que :

- 0,5 % des cartes de fidélité présentent un défaut ;
- 0,6 % des cartes de fidélité sans défaut sont rejetées ;
- 99 % des cartes de fidélité avec défaut sont rejetées.

1. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

	Avec défaut	Sans défaut	Total
Cartes rejetées			
Cartes acceptées			
Total			100 000

2. On prélève au hasard une carte parmi ces 100 000 cartes.
On considère les événements suivants :
D : « la carte de fidélité présente un défaut » ;
A : « la carte de fidélité est acceptée après contrôle ».

On rappelle que $P_B(A)$ est la probabilité que l'événement A soit réalisé, sachant que l'événement B est réalisé.

a) Calculer $P_A\left(\overline{D}\right)$. Donner le résultat sous forme décimale, arrondi au dix millième.

b) Calculer la probabilité qu'une carte qui a été rejetée ait un défaut. Donner le résultat sous forme décimale, arrondi au dix-millième.
Quelle remarque suggère ce résultat ?

Partie B : loi de Poisson

Un magasin de l'enseigne organise un tirage au sort pour l'anniversaire de son ouverture, et distribue durant plusieurs jours des cartes à gratter dont certaines permettent de gagner un cadeau. Le nombre de cadeaux « grands gagnants » est en moyenne de 5 par jour.
On considère la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de « grands gagnants » par jour.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.
Les résultats de calculs de probabilités seront arrondis au centième.

1. Calculer $P(X = 5)$.

2. Déterminer $P(X > 10)$.

3. Soit N le nombre de cadeaux « grands gagnants » que le magasin a en stock chaque jour.

a) Déterminer la plus petite valeur de l'entier N tel que $P(X \leq N) \geq 0{,}85$.

b) Interpréter ce résultat.

Partie C : loi normale

On interroge un client choisi au hasard parmi l'ensemble des clients possédant la carte de fidélité. Soit Y la variable aléatoire qui donne le montant de ses achats par semaine.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 6.
Tous les résultats de calculs de probabilités seront donnés sous forme décimale, arrondie au centième, en utilisant la calculatrice ou la table.

1. Calculer $P(34 \leq Y \leq 46)$.

2. Calculer la probabilité pour que le montant des achats dépasse 30 €.

Exercice n°3 (10 points)

Un procédé de fabrication industrielle d'un produit nécessite l'incorporation régulière d'un adjuvant, qui se dégrade au cours du temps. La quantité d'adjuvant dans le produit varie donc en fonction du temps.

Au début du procédé (à $t = 0$), on incorpore 4 litres de cet adjuvant. Au bout du temps *t*, exprimé en heures, la quantité d'adjuvant, exprimée en litres, présente dans le produit est donnée par :

$$f(t) = 4\mathrm{e}^{-t\ln 2}.$$

Partie A

1. Calculer la quantité d'adjuvant dans le produit au bout de 1 heure, puis au bout de 2 heures.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

b) Déterminer une expression de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, f' désignant la fonction dérivée de la fonction f.

c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. a) Sur la feuille **annexe**, **à rendre avec la copie**, compléter le tableau de valeurs et représenter la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

b) Déterminer graphiquement à partir de quel instant, noté t_1, la quantité d'adjuvant présente dans le produit devient inférieure à 0,5 litre.
On laissera apparents les tracés permettant cette lecture.

c) Déterminer, par le calcul, à partir de quel instant, noté t_2, la quantité présente dans le produit devient inférieure à 0,125 litre.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = f(n)$.

1. a) Établir que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = \dfrac{4}{2^n}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$. On précisera la valeur du premier terme.

2. Pour tout entier naturel *n*, on note $R_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

On rappelle que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q distincte de 1 est égale à :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $R_n = 8\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} R_n$.

Partie C : application au procédé de fabrication

Toutes les heures, on incorpore à nouveau 4 litres d'adjuvant dans le mélange. On admet que la quantité d'adjuvant présente dans le produit au bout de n heures est modélisée par le nombre R_n défini dans la partie B.
Ainsi, la quantité d'adjuvant présente dans le produit au bout d'une heure est $R_1 = u_0 + u_1$.

1. Déterminer à partir de quel nombre d'heures n de ce traitement, la quantité R_n d'adjuvant atteint 7,75 litres.

2. On estime que si la quantité d'adjuvant présente dans le produit dépasse 9 litres, alors le produit n'a plus les propriétés requises. En incorporant, comme décrit ci-dessus, 4 litres d'adjuvant toutes les heures, y a-t-il un risque d'atteindre cette quantité ? Expliquer brièvement.

ANNEXE

à rendre avec la copie

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(t)$, arrondi au dixième